

2.1.1. Масштабы турбулентности

В турбулентном потоке мы обычно разделяем мгновенное значение свойства потока на среднюю и флуктуационную составляющие.

При моделировании турбулентных течений значения искомым переменных разделяют на среднюю по времени (RANS-модели) или среднюю по пространству (LES, DES, DNS) и пульсационную составляющие. Иначе говоря, скорость турбулентного потока в некоторой точке можно представить как:

$$U = \bar{U} + u \quad (2.1)$$

Поскольку в этой работе не ставится целью произвести полный обзор моделей турбулентности с полными математическими выкладками, то ограничимся лишь приведением списка наиболее используемых моделей с классами их применимости и основными уравнениями.

Выше было сказано, что турбулентный поток можно представить как спектр вихрей различного масштаба. Пусть самые крупные вихри, с масштабом, соизмеримым с геометрией (например, толщина пограничного слоя) имеют характерный размер \hat{l} и масштаб скорости \hat{U} . Вихри этого порядка получают кинетическую энергию из усредненного потока, временной масштаб которого сравним с масштабом крупных вихрей:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = O(T^{-1}) = O\left(\frac{\hat{U}}{\hat{l}}\right) \quad (2.2)$$

Кинетическая энергия крупных вихрей передается тем вихрям меньшего масштаба, которые взаимодействуют с ними. Благодаря такому каскадному процессу кинетическая энергия передается от крупных вихрей к малым. Для малых вихрей силы трения (вязкостные силы) становятся значительными и кинетическая энергия диссипирует во внутреннюю. Диссипация энергии обозначается символом ε и имеет размерность энергии, отнесенной к единице массы и единице времени - $[\varepsilon] = \frac{m^2}{s^3}$.

Диссипация пропорциональна произведению кинематической вязкости и квадрату градиента флуктуационной составляющей скорости $\varepsilon \propto \nu (\nabla u)^2$. Конечно, силы трения существуют при всех масштабах вихрей, но их величина увеличивается с уменьшением масштаба вихря. Таким образом, было бы неправильно утверждать, что вся кинетическая энергия крупных вихрей полностью передается малым вихрям – некоторая небольшая их часть диссипирует. Тем не менее, принимается, что основная часть энергии (например, около 90%), приходящей из среднего потока в крупные вихри окончательно диссипирует только в малых вихрях.

Малые вихри, в которых происходит диссипация энергии называются Колмогоровским масштабом и характеризуются следующими величинами (масштабами): масштаб скорости (u), масштаб размера (η) и масштаб времени (τ). Предполагается, что эти масштабы определяются вязкостью

ν и диссипацией ϵ . Так как кинетическая энергия разрушается под воздействием вязкостных сил, то было бы естественно предположить, что вязкость и определяет масштаб вихрей – чем больше вязкость, тем больше масштаб. Количество диссипирующей энергии равно ϵ . Чем больше энергии необходимо преобразовать из кинетической во внутреннюю, тем большими должны быть градиенты скорости. Предполагая, что диссипативный масштаб определяется вязкостью и диссипацией, можно выразить u , η и τ через ν и ϵ используя анализ размерностей. Запишем

$$\frac{u}{[m/s]} = \frac{\nu^a}{[m^2/s]} \frac{\epsilon^b}{[m^2/s^3]} \quad (2.3)$$

В (2.3) под каждой переменной приведена ее размерность. Соответственно, размерности левой и правой частей (2.3) должны совпадать и, таким образом, имеем два уравнения – одно для пространства (2.4), второе (2.5) для времени:

$$1 = 2a + 3b \quad (2.4)$$

и

$$-1 = -a - 3b \quad (2.5),$$

из которых получаем, что $a = b = 1/4$. Так же получаем значения a и b для η и τ :

$$u = (\nu\epsilon)^{1/4}, \eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad (2.6)$$

2.1.2. Энергетический спектр

Масштабы турбулентности распределены по диапазону линейных размеров — от самых больших вихрей, взаимодействующих с усредненным потоком до самых маленьких, диссипирующих под действием сил вязкости. В пространстве волновых чисел энергия вихря с волновым числом $\kappa + d\kappa$ может быть представлена как:

$$E(\kappa)d\kappa, \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) представляет собой величину вклада элемента турбулентности с волновым числом от κ до $\kappa + d\kappa$ в кинетическую энергию k . Размерность волнового числа m^{-1} , и таким образом, можно считать, что волновое число κ обратно пропорционально радиусу вихря, то есть $\kappa \propto \frac{1}{r}$. Полная кинетическая энергия турбулентности получается интегрированием выражения (2.7) по всему пространству волновых чисел (см. рис. 2.1), то есть:

$$k = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (2.8)$$

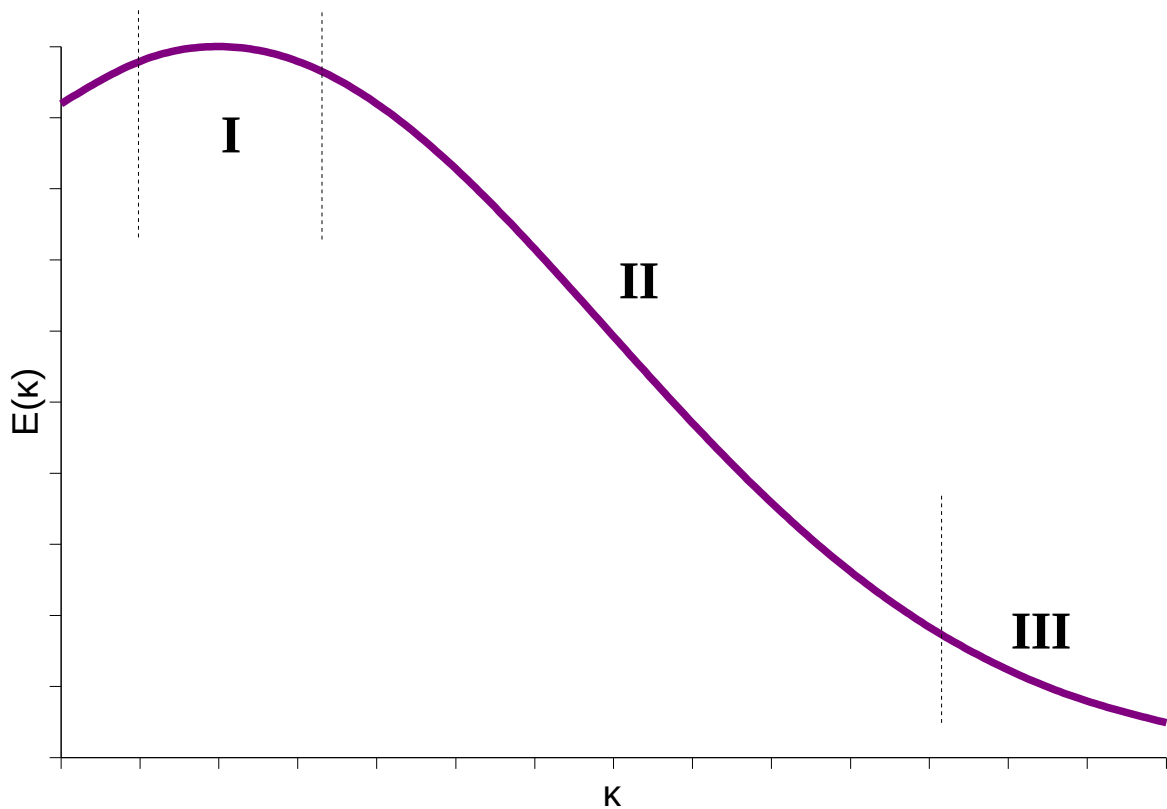


Рисунок 2.1. Спектр значений энергии турбулентности. I – диапазон больших вихрей, содержащих энергию среднего потока, II – инерционный под-диапазон, III – диапазон малых вихрей (изотропная турбулентность)

Кинетическая энергия является суммой кинетических энергий флуктуационной составляющей скорости по всем трем направлениям пространства, то есть:

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (2.9)$$

Качественный вид спектра E показан на рис. 2.1. Для спектра можно выделить следующие основные области:

I. *Область вихреобразования.* В этом диапазоне находятся вихри, несущие основную часть энергии. Вихри с волновым числом в этой области получают энергию из среднего потока и взаимодействуют с ним, их энергия передаётся вихрям с меньшими размерами. Характерный масштаб скорости и размера обозначается как \hat{U} и \hat{l} , соответственно.

II. *Инерционная под-область (инерционный интервал).* Для существования данной области необходимо чтобы число Рейнольдса было больше 100000 (полностью турбулентный поток). Данный диапазон является «транспортным» в каскадном процессе. Поток энергии (ϵ) поступает от больших вихрей из нижней области диапазона и передается к диссипативному диапазону в область высоких значений волнового числа. Вихри в данном диапазоне не зависят как от больших, энергосодержащих вихрей, так и от малых вихрей, расположенных в области диссипации. Можно показать, что вихри в

этом диапазоне характеризуются потоком энергии (ϵ) и их линейным размером $1/\kappa$. Исходя из соотношения размерностей получаем:

$$E(\kappa) = \text{const.} \epsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (2.10)$$

Эта важная закономерность (закон спектра Колмогорова или закон $-5/3$) постулирует, что если течение является полностью турбулентным, то энергетический спектр должен затухать пропорционально степени $-5/3$. Следствия этого закона широко используются в эксперименте и при LES- и DNS- моделировании.

III. *Диссипативный диапазон.* Характеризуется малыми размерами вихрей и их изотропностью, именно в этой области происходит диссипация. Размеры вихрей определяются масштабом Колмогорова (2.6).

Как было сказано выше, количество энергии, которая диссипирует при вихрях малых масштабов может быть оценено с помощью величин \hat{l} и \hat{U} . Энергия больших масштабов теряется за время, пропорциональное, \hat{l}/\hat{U} , откуда получаем, что:

$$\epsilon = O\left(\frac{\hat{U}^2}{\hat{l}}\right) = O\left(\frac{\hat{U}^3}{\hat{l}}\right) \quad (2.11)$$

2.1.3. Моделирование турбулентных течений

Несмотря на то, что турбулентный процесс хаотичен, он является детерминированным и описывается уравнениями Навье-Стокса. До середины прошлого века развитая турбулентность считалась лишенной какого-либо порядка, однако начиная с 60-х годов обозначился значительный прогресс в понимании природы турбулентности, связанный с осознанием природы турбулентности. Подробный обзор современных методов описания турбулентности приведен в [8].

Сегодня для численного моделирования инженерных задач используется модели, основанные на подходе Рейнольдса, а для решения фундаментальных задач — прямое моделирование, основанное, например, на спектральном анализе. Здесь необходимо отметить, что Прямое Численное Моделирование (DNS — Direct Numerical Simulation) это не модель турбулентности — система уравнений Навье-Стокса решается с учетом вихрей всего волнового диапазона и, таким образом, получается полная картина каскадного процесса. Такой подход требует значительных вычислительных ресурсов и сегодня не применим для решения практических задач.

В данной работе выполнен обзор наиболее популярных моделей полу-эмпирических моделей турбулентности, полученных путем усреднения уравнений Навье-Стокса по правилу Рейнольдса.

Ниже, на рисунке 2 представлена диаграмма со списком моделей по мере возрастания их сложности.

Прежде чем обсуждать конкретные модели, приведем вывод уравнения Рейнольдса и обозначим основную проблему — проблему замыкания.

уравнения сохранения импульса (для несжимаемой среды, $\partial \rho / \partial p \approx 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] \quad (2.12)$$

Разделим значения гидродинамических величин (скорости, давления) на две составляющие:

- среднюю
- и флуктуационную

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + p' \\ \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (2.13)$$

Определим следующие правила осреднения величины $X = \bar{X} + x$:

$$\langle X \rangle = \bar{X} \quad \langle \bar{X} \rangle = \bar{X} \quad \langle x \rangle = 0 \quad (2.14)$$

Подставляя разложение (2.13) в (2.12) и применяя осреднение по правилам (2.14) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\mathbf{U}}) + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \mu [\nabla \bar{\mathbf{U}} + (\nabla \bar{\mathbf{U}})^T] - \nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \quad (2.15)$$

Полученное новое дополнительное слагаемое $\rho \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$ (или, если разделить уравнения на ρ , вынесенную за знак дифференциала, $\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$) называется тензором напряжений Рейнольдса представляет собой среднее напряжений, возникающих вследствие мгновенных флуктуаций скорости, или, иначе $\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}$ — корреляции между флуктуациями скорости.

Таким образом, помимо 4 неизвестных (3 составляющих скорости и давление) появляются еще шесть (так как тензор является симметричным) - и система уравнений становится незамкнутой.

Для замыкания используются различные подходы, позволяющие связать тензор напряжений с усредненными параметрами потока:

- Модели вихревой вязкости — используется либо допущение Буссинеска, согласно которому тензор напряжений Рейнольдса прямо пропорционален градиенту скорости (коэффициент пропорциональности — т.н. турбулентная вязкость), либо его обобщение — нелинейные модели.

- Модель длины пути смещения (модель Прандтля) — простейшая модель для одномерных течений, основывается на предположении о том, что чем выше уровень турбулентных пульсаций, тем выше турбулентная вязкость: $\nu_t = l^2 |\partial_z U_x|$.

- Модель переноса турбулентной вязкости — рассматривается уравнение транспорта для турбулентной вязкости (например, модель Спаларта-Аллмараса)

- Двух-параметрические линейные модели — наиболее широкий класс моделей. Рассматриваются два уравнения транспорта

для величин, определенная комбинация

- Нелинейные модели — тензор напряжений вычисляется как суперпозиция тензоров деформации и завихренности осредненного потока, возведенных в определенную степень (от 0 до 5).
- Модели транспорта напряжений Рейнольдса — для каждой составляющей тензора решается свое уравнение транспорта.
- Модели пространственной фильтрации:
 - LES-методика (Large Eddy Simulation, Моделирование Больших Вихрей) — основная идея состоит в том, что энергетический спектр условно разбивается в инерционной области по волновому числу на две части: большими и меньшими некоторого κ_s . Крупномасштабные структуры (с волновым числом больше κ_s) разрешаются напрямую, для мелкомасштабных (SGS — Sub Grid Scale, под-сеточный масштаб) вихрей выполняется моделирование с использованием методики, основанной на турбулентной вязкости.
 - DES-методика (Detached Eddy Simulation, Модель Отсоединенного Вихря) Методика представляет собой совмещение LES (для крупных вихрей) и RANS (для пристеночного течения) подходов.

Ниже, на рисунке 2.2 представлена диаграмма «эволюции» моделей по степени их сложности. В данной работе, поскольку рассматриваются стационарные режимы и количество ячеек ограничено сверху (необходимо использовать пристеночные функции), используется RANS-подход. Соответственно и материал главы ограничен только областью RANS-моделей и пристеночных функций.

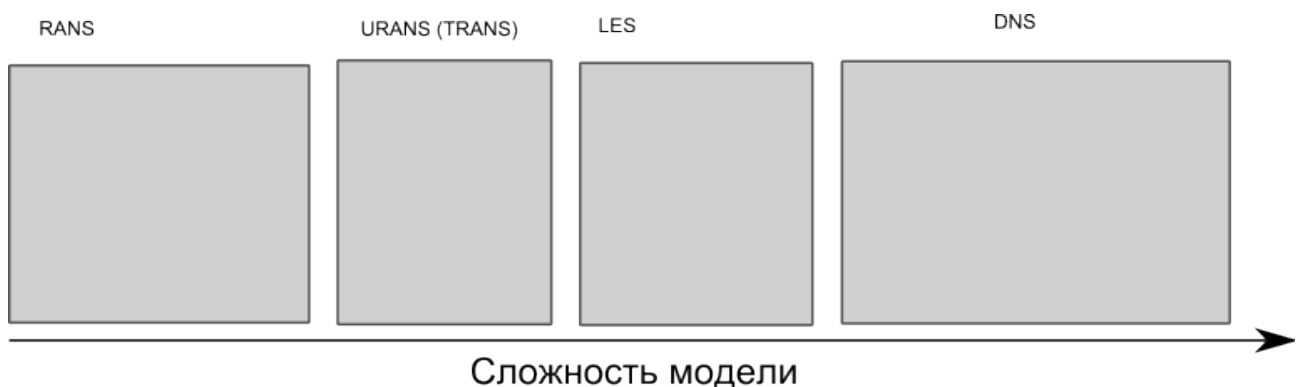


Рисунок 2.2. Модели турбулентности.

2.1.4. Модели вихревой вязкости

Эта группа подходов является сегодня наиболее распространенной. Основанием для всех моделей этой группы служит то, что замыкание уравнений Рейнольдса (2.15) осуществляется посредством следующего выражения (предположение Буссинеска):

$$\rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = -\mu_t [\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T] + \frac{2}{3} k \mathbf{I} \quad (2.16),$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица}$$

$\mu_t = \rho \nu_t$ – турбулентная динамическая вязкость,

k – кинетическая энергия турбулентности, $k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$

Для вычисления турбулентной вязкости необходимо использовать либо специальные предположения (например, Прандтля), либо транспортное уравнение, или же дополнительную систему уравнений величин, моделирующую эволюцию кинетической энергии турбулентности и скорость ее диссипации. В последнем случае искомая турбулентная вязкость определяется из формулы Колмогорова для локальной изотропной турбулентности, устанавливающей универсальную связь между турбулентной вязкостью, кинетической энергией турбулентности и скоростью диссипации последней.

В зависимости от того, как вычисляется турбулентная вязкость, меняется и класс модели. Самой простой является Модель Прандтля, оперирующая понятием длины пути смешения. Использование данной модели оправданно только в случае достаточно простых течений — средняя скорость имеет одну компоненту, а преобладающим является только градиент средней скорости в перпендикулярном направлении. Тогда можно написать, что:

$$\overline{u_x u_z} = -l^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2 \quad (2.17)$$

Сравнивая (2.17) с определением тензора Рейнольдса получаем, что турбулентная вязкость вычисляется как:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U_x}{\partial z} \right| \quad (2.18)$$

Следующими по степени сложности являются однопараметрические модели — для некоторой величины, характеризующей турбулентный поток используется эволюционное уравнение. Примером может служить уравнение Колмогорова [8] для кинетической энергии турбулентности. Широкое распространение сегодня получила модель Спаларта-Аллмараса, описывающая транспорт модифицированной вязкости:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\nu} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\nu} = Q(\tilde{\nu}) + \frac{c_{b2}}{c_{b3}} \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu} + \frac{1}{c_{b3}} \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] \quad (2.19),$$

где источниковое слагаемое $Q(\tilde{\nu})$:

$$Q(\tilde{\nu}) = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \left(\frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} - c_{w1} f_w \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (2.20)$$

вихревая вязкость вычисляется через модифицированную через соотношение:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu t} \quad (2.21)$$

Штрафные функции, вспомогательные соотношения и переключательный множитель модели следующие:

$$f_{\nu t} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu t}^3}, \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu t}}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (2.22)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (2.23)$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2}, \quad S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ji}}, \quad f_{t2} = \exp(-c_{t4} \chi^2) \quad (2.24)$$

Переменная d — расстояние до ближайшей стенки, κ - константа фон Кармана, и тензор напряжений $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j U_i + \partial_i U_j)$, $S = \frac{1}{2}(\nabla U + (U)^T)$. Значения замыкающих коэффициентов модели следующие:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{b3} = \frac{2}{3}, \quad c_{\nu t} = 7.1 \quad (2.25)$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{c_{b3}}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad c_{t3} = 1.2, \quad c_{t4} = 0.5 \quad (2.26)$$

Граничное условие на стенке:

$$\tilde{\nu} = 0 \quad (2.27)$$

Данная модель разрабатывалась для моделирования внешних течений.

Следующими по сложности из моделей вихревой вязкости являются двухпараметрические. Этот класс начинает свою историю с широкой известной модели $k-\epsilon$. В рамках данного подхода решалось два уравнения транспорта — одно для кинетической энергии турбулентности, второе — для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности. Вихревая вязкость вычисляется по формуле Колмогорова:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.28)$$

Приведем основные уравнения модели.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \nabla \cdot (\rho U k - \Gamma^{(k)} \nabla k) = \rho(P^{(k)} - \epsilon) \quad (2.29)$$

Уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla \cdot (\rho U \epsilon - \Gamma^{(\epsilon)} \nabla \epsilon) = \rho(C_{\epsilon 1} P^{(k)} - C_{\epsilon 2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k} \quad (2.30)$$

Коэффициенты диффузии $\Gamma^{(k)}$ и $\Gamma^{(\epsilon)}$ связаны с турбулентной

вязкостью через числа Прандтля σ :

$$\Gamma^{(k)} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^{(k)}}, \quad \Gamma^{(\epsilon)} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^{(\epsilon)}} \quad (2.31)$$

Удельная генерация кинетической энергии турбулентности вычисляется:

$$P^{(k)} = -\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \cdot \nabla \mathbf{U} = 2 \text{symm}(\nabla \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{U} \quad (2.32)$$

Значения констант в стандартной модели Лаундера и Сполдинга следующие:

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\epsilon_1} = 1.92, \quad C_{\epsilon_2} = 1.44, \quad \sigma^{(k)} = 1.0, \quad \sigma^\epsilon = 1.3 \quad (2.33)$$

Система уравнений (2.28, 2.29, 2.30) может использоваться для описания развитых турбулентных течений, т.е. течений, на которых не сказываются вязкостные и пристеночные эффекты. Применительно к турбулентным пограничным слоям это означает возможность их применения к областям течения, лежащим вне вязкого подслоя и переходной области. Это обстоятельство стало стимулирующим в создании приемов, связанных с использованием пристеночных функций. Суть метода заключается в том что, ввиду универсальности распределения основных величин в пограничном слое, можно перенести ГУ с поверхности расчетной области в первый ряд ячеек. Описание этого подхода будет дано ниже, здесь же следует отметить, что использование пристеночных функций позволяет существенно сократить временные затраты. Опыт использования модели $k-\epsilon$ с пристеночными функциями показал, что осталось ещё немало нерешенных проблем, связанных с описанием пристеночных эффектов при больших продольных перепадах давления, при малых и переходных числах Рейнольдса, в трехмерных течениях.

Несмотря на широкое распространение, у модели $k-\epsilon$ есть один существенный недостаток, связанный с заложенной в уравнения сингулярностью. Диссипативный член в уравнении для ϵ будет стремиться к бесконечности при $k \rightarrow 0$; кроме того, при $y \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и значение v_t становится неопределенным.

Для решения этой проблемы была предложена модель $k-\omega$. Вместо скорости диссипации ϵ вводится параметр ω , определяемый как $\omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k}$ - удельная скорость диссипации. В этом случае вихревая вязкость рассчитывается из соотношения:

$$v_t = \frac{k}{\omega} \quad (2.34)$$

Система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k - \Gamma^{(k)} \nabla k) = \rho (P^{(k)} - \beta^* \omega k) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \omega - \Gamma^{(\omega)} \nabla \omega) = \rho \left(\frac{\alpha}{v_t} P^{(k)} - \beta \omega^2 \right) \quad (2.36)$$

Опять же, коэффициенты диффузии $\Gamma^{(k)}$ и $\Gamma^{(\omega)}$ связаны с турбулентной вязкостью через числа Прандтля σ :

$$\Gamma^{(k)} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^{(k)}}, \quad \Gamma^{(\epsilon)} = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^{(\omega)}} \quad (2.37)$$

В оригинальной версии модели Вилкокса (1988г.) коэффициент имели следующие значения:

$$\beta^* = \frac{9}{100}, \quad \alpha = \frac{5}{9}, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \sigma^{(k)} = 2.0, \quad \sigma^\omega = 2.0 \quad (2.38)$$

В данной модели $\omega \rightarrow \infty$ при стремлении $y \rightarrow 0$. При этом у модели появилась другая особенность — решение было излишне чувствительно к значению ω на границе расчетной области.

Для преодоления недостатков моделей $k-\epsilon$ и $k-\omega$, в 1994 году Ментором была разработана смешанная модель [8], которая в пристеночной области вела себя как $k-\omega$ и в области свободного течения — как $k-\epsilon$. Модель получила название $k-\omega SST$ и сегодня является наиболее распространенной. Эта модель использовалась при расчетах в данной работе.

2.1.5. Практические аспекты расчетов

При проведении пространственных расчетов, в которых требуется определить параметры движения жидкости (как при внешних, так и при внутренних течениях) турбулентные режимы являются скорее правилом, чем исключением и, соответственно, требуется качественно и количественно адекватно смоделировать флуктуации основных гидродинамических величин. И, если задачу моделирования турбулентного переноса в расчетной области «берут на себя» математические модели, то за правильность моделирования турбулентности на границах отвечает инженер (расчетчик). В случае, если граничные условия были поставлены неправильно, результат расчета может частично или полностью расходиться со здравым смыслом, экспериментальными и/или эмпирическими данными — в зависимости от полноты имеющейся информации о моделируемом объекте. Кроме того, в силу математических особенностей моделей турбулентности решение может просто не сойтись при определенных значениях параметров на граничных областях. В данном разделе описываются общие практические подходы, которые могут быть использованы при моделировании турбулентных течений жидкостей. Можно выделить следующие основные проблемы, возникающие при задании граничных условий:

1. Параметры турбулентности на входе в расчетную зону (для внешних и внутренних задач). В идеале, необходимо знать распределение поля скоростей и основных характеристик по сечению на входе из эксперимента или иметь аналитическую зависимость. Если же эти данные отсутствуют, то можно воспользоваться полуэмпирическими зависимостями, приведенными ниже и задать равномерное распределение. Альтернативным вариантом может служить (если, например, следует учесть предысторию потока

максимально точно) численный эксперимент.

2. Параметры турбулентного потока на бесконечности (для внешних задач). В этом случае, лучше задаваться равномерным распределением величин, характеризующих турбулентность и при этом желательно (особенно для внешних задач) производить проверку значений на границах на допустимость (например, для масштаба турбулентной вязкости ($\frac{\mu_t}{\mu}$, см. ниже) нормальными являются значения от 1 до 10.

3. Параметры расчетной сетки и модели турбулентности в областях с прилипанием (стенки). Здесь основными параметрами являются толщина ячеек, непосредственно прилегающих к стенке (пограничный слой), тип учета турбулентности в пограничном слое: пристеночные функции, модели турбулентности для низкого числа Рейнольдса и учет шероховатости (при наличии априорной информации).

Ниже будут описаны базовые характеристики турбулентного движения жидкости (интенсивность турбулентности (I), масштаб турбулентности (I), масштаб турбулентной вязкости ($\frac{\mu_t}{\mu}$) и способы их оценки, затем будут приведены формулы, позволяющие связать их с транспортными свойствами моделей турбулентности и, наконец, рекомендации по моделированию пограничного слоя. Информация данного раздела будет использована при описании методик практического использования CFD.

Интенсивность турбулентности.

Интенсивность турбулентности (I) определяется как отношение среднеквадратичного отклонения скорости u' к усредненной скорости потока U_{avg} . Условно, диапазон значений интенсивности турбулентности можно разделить на два основных класса:

- значения I , меньшие или равные 1% относят к низкой интенсивности турбулентности,
- значения I , большие или равные 10% относят к высокой интенсивности.

В оптимальном случае, при проведении расчетов, оценка значения I на входе в расчетную область получают исходя из внешних (экспериментальной) данных. Например, при моделировании эксперимента в аэродинамической трубе величину интенсивности турбулентности набегающего потока получают по характеристиками трубы. Для современных низко-турбулентных аэродинамических труб величина интенсивности турбулентности может быть меньше 0.05%.

Для внутренних течений, интенсивность турбулентности на входе полностью зависит от предыстории набегающего потока. Если известно, что набегающий потока не развитый и невозмущенный, то можно использовать низкие значения интенсивности (менее 1%), в противном случае, величина I может достигать нескольких (или более) процентов. Оценить значение I в

ядре развитого турбулентного потока в канале можно по следующему эмпирическому соотношению:

$$I = \frac{u'}{U_{avg}} = 0.16(Re_{D_H})^{-1/8} \quad (2.39)$$

Например, при числе Рейнольдса 5×10^4 интенсивность турбулентности будет порядка 4%

Масштаб Турбулентности

Масштаб турбулентности (I) – физическая величина, характеризующая размер «крупных» вихрей, получающих свою энергию от турбулентного потока. При развитых внутренних течениях в трубах величина I ограничена сверху геометрическими размерами канала (ясно, что размеры вихря не могут превышать размеров трубы). Приблизительно можно использовать следующее соотношение для определения величины I в зависимости от характерного размера тракта (L):

$$I = C \cdot L \quad (2.40)$$

где C – поправочный коэффициент, равный 0.07 при развитом турбулентном течении в трубе с круглым сечением диаметра L . В случае, если канал имеет форму сечения, отличную от окружности, в качестве значения L следует использовать гидравлический диаметр. Если турбулентность потока в канале «наследует» свою характерную длину от некоторого препятствия (например, перфорированной перегородки), то в этом случае при вычислении I предпочтительнее использовать некоторый характерный размер препятствия, нежели канала.

Использование зависимости (2.40) не всегда оправдано, однако, подводя итоги, можно сказать, что в следующих случаях оценка (2.40) является правомерной:

- Для внутренних течений в трубопроводах в качестве L следует использовать гидравлический диаметр, и C равно 0.07.
- Для течений с препятствиями в качестве L выбирается характерный размер препятствия (C равно 0.07).
- При моделировании пристеночных течений с формированием пограничного слоя на входе, в качестве L следует использовать толщину пограничного слоя и значение множителя C , равное 0.4.

Масштаб Турбулентной Вязкости

Масштаб турбулентной вязкости $\left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)$ - величина, прямо пропорциональная турбулентному числу Рейнольдса:

$$Re_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu} \quad (2.41),$$

которое велико ($10^2 - 10^3$) в пограничных слоях с высоким числом Рейнольдса и при развитых течениях в каналах. Для границ на бесконечности при внешних течениях отношение $\frac{\mu_t}{\mu}$ является относительно малой величиной. Обычно, параметры модели турбулентности выбираются таким образом, чтобы $\frac{\mu_t}{\mu}$ находилось в пределах от 1 до 10.

Соотношения между транспортными свойствами моделей турбулентности и базовыми характеристиками турбулентного потока (I , l , $\frac{\mu_t}{\mu}$).

При использовании моделей турбулентности (будь то двух-параметрические модели вроде $k-\epsilon$ и $k-\omega$, одно-параметрическая модель Спаларта-Аллараса, LES-, DES- или DNS-модель) необходимо связать транспортные свойства модели с описанными выше базовыми свойствами.

Для этого можно воспользоваться следующими соотношениями:

- Модифицированная турбулентная вязкость (модель Spalart-Allmaras) $\tilde{\nu}$

$$\tilde{\nu} = \sqrt{\frac{3}{2}} U_{avg} l \quad (2.42)$$

- Кинетическая энергия турбулентности k (модели $k-\epsilon$, $k-\omega$, LES):

$$k = \frac{3}{2} (U_{avg} l)^2 \quad (2.43)$$

- Скорость диссипации турбулентности ϵ :

$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (2.44),$$

где C_μ - параметр модели турбулентности, который для большинства моделей равен 0.09

скорость диссипации можно вычислить и через $\frac{\mu_t}{\mu}$:

$$\epsilon = \rho C_\mu \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu}\right)^{-1} \quad (2.45)$$

- Удельная скорость диссипации турбулентности $\omega = \frac{\epsilon}{C_\mu k}$:

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{C_\mu^{1/4} l} \quad (2.46),$$

удельную скорость диссипации можно вычислить и через $\frac{\mu_t}{\mu}$:

$$\omega = \rho \frac{k}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1} \quad (2.47)$$

- Вычисление компонент тензора напряжений Рейнольдса (при использовании RSM моделей) осуществляется при предположении, что турбулентность изотропна ($\overline{u_i' u_j'} = 0$), и следовательно, диагональные компоненты равны ($\overline{u_i' u_i'} = \frac{2}{3} k$

2.2. Характеристики RANS-моделей турбулентности в пограничном (пристеночном) слое

В последние годы значительно выросли объёмы промышленных проблем ВГД, и, при этом, несмотря на быстрый рост вычислительных мощностей, остается немало прикладных задач, в которых разрешение сетки недостаточно для интегрирования уравнений в области пограничного слоя — для точных вычислений все еще требуются пристеночные функции. Например, при моделировании срыва потока в турбинном машиностроении необходим детализированный учет крупно-масштабных характеристик потока во всем компрессоре; предполагая, что для каждого межлопаточного прохода будет использоваться высококачественная сетка, получаем, что размер расчетной области может легко превысить 50 миллионов узлов. Пристеночные функции также необходимы при разработке RANS-методов «Погруженной Границы» в Декартовых координатах. Недостатки существующих методов побуждают к дальнейшему исследованию в этой области.

При моделировании течений, ограниченных стенками (внутренних течений) для точного учета пограничного слоя необходимо большое число ячеек. Интегрирование уравнений модели турбулентности вплоть до стенки приводит к необходимости соблюдать условие непревышения y^+ значения 1 для всех ячеек, примыкающих к данной границе расчетной области (ячейки должны находиться в области вязкого подслоя). Пристеночные функции предназначены для снятия этого излишне строгого условия.

Например, ячейки первого ряда могут быть размещены в логарифмической области (логарифмическом слое), что приведет к существенному снижению количества ячеек в пограничном слое. Вообще говоря, такое упрощение не должно привести к существенному падению точности. При обычном интегрировании вплоть до стенки, коэффициенте увеличения толщины слоя 1.15 и числе Re, вычисленному по толщине потери импульса и равному 5000 необходимо 40 слоев; и в тоже время, при использовании пристеночных функций (y^+ первого слоя может быть порядка 100) можно обойтись 15 слоями. Подобный пример наглядно показывает реальные преимущества пристеночных функций и доказывает

необходимость их разработки и использования. Выигрыш в вычислительной эффективности будет не только за счет более маленькой расчетной сетки, но и вследствие снижения масштабности сетки вблизи стенок, что всегда приводит к снижению жесткости решения.

В основе теории, *описывающей* пристеночные функции, лежит универсальный характер «закона-у-стенки». Закон утверждает, что при любых условиях течения форма решения между стенкой и внешней границей логарифмического слоя (области) инвариантна (носит постоянный характер) при использовании надлежащего метода масштабирования. Вскоре после того как была успешно разработана первая RANS-модель турбулентности, универсальность характеристик логарифмического слоя была использована при создании «около-стеночного» граничного условия. В первых пристеночных функциях необходимо было обеспечить положение первой после стенки точки в пределах логарифмического слоя. Это ограничение слишком строгое, вследствие чего оно постоянно нарушается при построении сетки. Если точки расчетной сетки лежат в вязком подслое, то естественно, результаты расчетов по логарифмическим функциям обычно становятся слишком неточными. Пристеночные функции, которые не налагают ограничений на положение первой точки между стенкой и логарифмическим слоем называются адаптивными, или, иногда — пристеночными функциями малого y^+ (low- y^+). У них долгая история, несколько было разработано недавно.

Три основных вопроса должны быть исследованы при разработке адаптивных пристеночных функций. Во-первых, должно быть предусмотрено «физически» корректное граничное условие, независимое от положения первого после стенки узла. Несмотря на тривиальность этого вопроса, во многих моделях приходится прибегать к компромиссу между условиями для турбулентных величин и условиями в переходном буферном слое. Например, для кинетической энергии турбулентности используется условие нулевого градиента для всего пограничного слоя - $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$. Для логарифмического и вязкого слоев это справедливо, в отличие от переходного $5 < y^+ < 30$. Именно переходный слой является наиболее сложной и спорной частью в адаптивной методике.

Вторым рассматриваемым вопросом является численная точность. Вследствие того, что первый узел расчетной сетки после стенки уже не находится в непосредственной близости от последней, расчетная сетка становится более грубой. Для хороших (мелких) сеток интегрирование вплоть до стенки необходимо, так как большие градиенты величин потока и турбулентности находятся именно в вязком подслое. Ошибка округления дискретизированных операторов становится значительной для сеток с использованием пристеночных функций. Даже в том случае, если тип граничного условия соответствует положению первого узла, численная неточность может загрязнить результат. Отделение численной ошибки от аппроксимации физического решения является само по себе нетривиальной задачей и требует внимательного изучения.

Последний, но не менее важный вопрос — необходимо исследовать диапазон адекватности (применимости) пристеночной функции. Критерии для вычисления максимального значения y^+ первого узла могут быть выведены для некоторого данного числа Re потока. Применимость представленной концепции для более сложных течений определена с помощью применения адаптивных пристеночных функций при расчете отрывных течений, вызванных градиентом давления.

2.2.1 Пристеночные характеристики потока

В данной работе мы ограничимся исследованием течения несжимаемой жидкости с постоянной молярной вязкостью. В случае турбулентного течения профиль скорости может быть разбит на три области: вязкий подслой, логарифмический слой и переходный. Положение внешней границы логарифмического слоя зависит от числа Re так, как это показано на рис. 2.3.a). Размер логарифмического слоя растет с увеличением числа Re .

В квази-равновесном пограничном слое (течение вдоль плоской пластины с нулевым градиентом по давлению) распределение характеристик потока в области между стенкой и внешней границей универсально: профили соответствующих величин становятся инвариантными при масштабировании их с помощью динамической скорости u_τ и молекулярной вязкости ν . Эта универсальность делает возможным вывод пристеночных функций.

Вблизи стенки производными в направлении потока можно пренебречь и характеристики потока и турбулентности зависят лишь от координаты y , направленной по нормали к стенке (границе расчетной области). По существу, получаем турбулентное упрощение Коллетта. Для вывода решения для вязкого подслоя и логарифмического слоя приведем все уравнения к безразмерному виду. Безразмерные величины (со знаком '+') вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U^+ &= U/u_\tau & y^+ &= \frac{u_\tau y}{\nu} & v_l^+ &= \frac{v_l}{\nu} & \tilde{v}^+ &= \frac{\tilde{v}}{\nu} & k^+ &= \frac{k}{u_\tau^2} & \omega^+ &= \frac{\omega \nu}{u_\tau^2}, \\
 g^+ &= \frac{g u_\tau}{\sqrt{\nu}} & \epsilon^+ &= \frac{\epsilon \nu}{u_\tau^4} & \overline{v^2}^+ &= \frac{\overline{v^2}}{u_\tau^2} & f^+ &= \frac{f \nu}{u_\tau^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Эти переменные, а также уравнения для вязкого подслоя и логарифмического слоя будут описаны ниже.

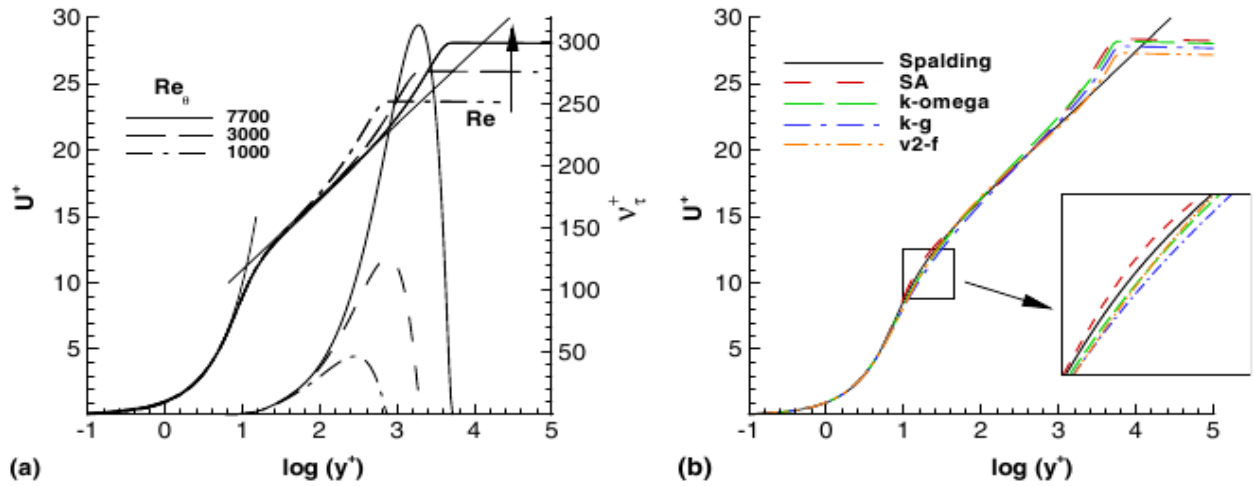


Рисунок. 2.3 Численные решения для U^+ и v_t^+ вычисленные по модели Спаларта-Аллмараса с интегрированием вплоть до стенки для разных значений Re_θ (а) и сравнение различных моделей турбулентности с формулой Сполдинга для $Re_\theta = 7700$ (б).

2.2.2 Пристеночные функции для RANS-уравнений

Как было сказано выше, для случая течения потока вдоль бесконечной плоской пластины и нулевым градиентом давления, система уравнений Навье-Стокса в области от стенки до внешней границы логарифмического слоя упрощается до:

$$\frac{d}{dy} \left((\mu + \mu_t) \frac{dU}{dy} \right) = 0 \quad (2.49)$$

Интегрируя вдоль координаты y получаем:

$$(\mu + \mu_t) \frac{dU}{dy} = \rho u_\tau^2 \quad (2.50)$$

Данное уравнение устанавливает постоянство суммы вязкого и турбулентного сдвиговых напряжений, которая равна пристеночному сдвиговому напряжению $\tau_w = \mu (\partial U / \partial y)_w = \rho u_\tau^2$. Обезразмеривая (2.50) согласно (2.48) получаем:

$$(1 + v_t^+) \frac{dU^+}{d y^+} = 1 \quad (2.51)$$

В вязком подслое, когда $v_t^+ \ll 1$ используется линейный закон: $U^+ = y^+$, в логарифмическом подслое используется следующее упрощение (2.51):

$$v_t^+ \frac{dU^+}{d y^+} = 1 \quad (2.52)$$

Используя допущение Прандтля для турбулентной вязкости:

$$v_t^+ = \kappa y^+ \quad (2.53)$$

Интегрирование (2.52) с учетом (2.53) дает $U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(y^+) + B_{\log}$, где значения констант получены экспериментально и равны: $\kappa = 0.41$, $B_{\log} = 5$

Далее, предположим, что значения v_t^+ . Тогда проинтегрировав (2.52) можно получить универсальную функцию $U^+(y^+)$. В первом приближении можно предположить (принять) вид этой функции — например, в виде профиля Сполдинга. Однако, более корректным подходом было бы разработать такую функцию, которая была бы справедлива для любой модели и уравнения в пристеночном слое решались бы численно. Теперь, зная универсальную функцию, мы можем вычислить значение динамической скорости по известной скорости в первой точке сетки после стенки. Обозначим скорость потока в первой точке U_1 , а расстояние до стенки y_1 , тогда:

$$Re_y = y_1 U_1 / \nu = y_1^+ U^+(y_1^+) = F(y_1^+) \quad (2.53)$$

Re_y — это число Рейнольдса, вычисленное в примыкающей к стенке расчетной ячейке. Выражение справа — искомая универсальная функция. Вычисляя обратную к ней, получаем:

$$y_1 u_\tau / \nu = F^{-1}(y^+) \quad (2.53a)$$

Так может быть получено значение u_τ . Для известной $F(y_1^+)$ обратная функция может быть найдена итеративно методом Ньютона. Это можно сделать единожды, а полученную функцию сохранить в виде таблицы. В методе конечных объёмов динамическая скорость используется в уравнении баланса импульсов и, таким образом, служит как граничное условие для вычисления U_1 . В методе конечных разностей, используется (2.52) как ГУ второго рода (фиксированный градиент) для скорости.

Вихревая вязкость может быть вычислена явно, используя профиль скорости. Во всей области между стеной и внешней границей логарифмического слоя вихревая вязкость связана с градиентом скорости согласно (2.52):

$$v_t^+ = \frac{dy^+}{dU^+} - 1 \quad (2.54)$$

В некоторых пристеночных функциях соотношение (2.54) между профилем скорости и вихревой вязкостью не выполняется и результат зависит от сетки. Можно использовать (2.54) чтобы получить ГУ для одного из турбулентных параметров и, таким образом, обусловить согласованность между значениями вихревой вязкостью и градиентом скорости: например, выражение в модели $k-\omega$ выражение (2.54) может быть использовано для вычисления k при заданном ГУ для ω . Формально, решение полученное с помощью пристеночных функций должно плавно переходить в решение во внешней области. Несмотря на то, что правильное сопряжение областей позволяет получить независимую от расчетной сетки формулировку пристеночной функции, вопросы численной точности и использования предположения о квази-равновесности требуют дальнейшего рассмотрения.

Аналитические решения уравнений турбулентности могут быть получены для вязкого подслоя и логарифмического слоя. Для переходной области эта задача является трудноразрешимой. Решением может быть

использование таблицы со значениями безразмерных турбулентных величин, полученная из численного решения без использования пристеночных функций. Далее рассматриваются аналитические решения в вязком подслое и логарифмическом слое для моделей Спаларта-Аллмараса, $k-\omega$.

Модель Спаларта-Аллмараса

Около стенки уравнение для модифицированной вязкости может быть записано в следующем виде:

$$c_{b1}(1-f_{t2})\tilde{S}^+ \tilde{\nu}^+ + \left(\frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} - c_{w1} f_w \right) \left(\frac{\tilde{\nu}^+}{y^+} \right)^2 + \frac{c_{b2}}{c_{b3}} \left(\frac{d\tilde{\nu}^+}{dy^+} \right)^2 + \frac{1}{c_{b3}} \frac{d}{dy^+} \left((1+\tilde{\nu}^+) \frac{d\tilde{\nu}^+}{dy^+} \right) = 0 \quad (2.55)$$

где $\tilde{\nu}^+ \equiv \chi$.

В вязком подслое функции $f_{v1} \rightarrow 0$, $f_{v2} \rightarrow 1 - \tilde{\nu}^+$, $f_w \rightarrow 1$. Напряжение $S^+ = dU^+/dy^+ = 1$ и модифицированное напряжение принимает вид: $\tilde{S}^+ = \tilde{\nu}^+ / (\kappa^2 (y^+)^2)$. В соответствие с этим, уравнение (2.55) принимает следующий вид:

$$(1+c_{b2}) \left(\left(\frac{d\tilde{\nu}^+}{dy^+} y^+ \right)^2 - \left(\frac{\tilde{\nu}^+}{y^+} \right)^2 \right) + (1+\tilde{\nu}^+) \frac{d^2\tilde{\nu}^+}{(dy^+)^2} = 0 \quad (2.56)$$

Функция $\tilde{\nu}^+ = \kappa y^+$ удовлетворяет уравнению (2.56) ($\tilde{\nu}^+$ меняется линейно в вязком подслое). Вихревая вязкость $\nu_t^+ = f_{v1} \tilde{\nu}^+$ пропорциональна $(y^+)^4$. Несложно показать, что и в логарифмическом слое $\tilde{\nu}^+ = \nu_t^+ = \kappa y^+$. Один из ключевых моментов состоит в том, чтобы сформулировать такое уравнение для $\tilde{\nu}$ решение которого было бы практически линейно в пристеночном слое. Характер распределения вихревой вязкости ν_t^+ и безразмерной $\tilde{\nu}^+$ приведен на рис. 2.4 — как видно, $\tilde{\nu}^+$ меняется практически линейно, а наклон равен κ

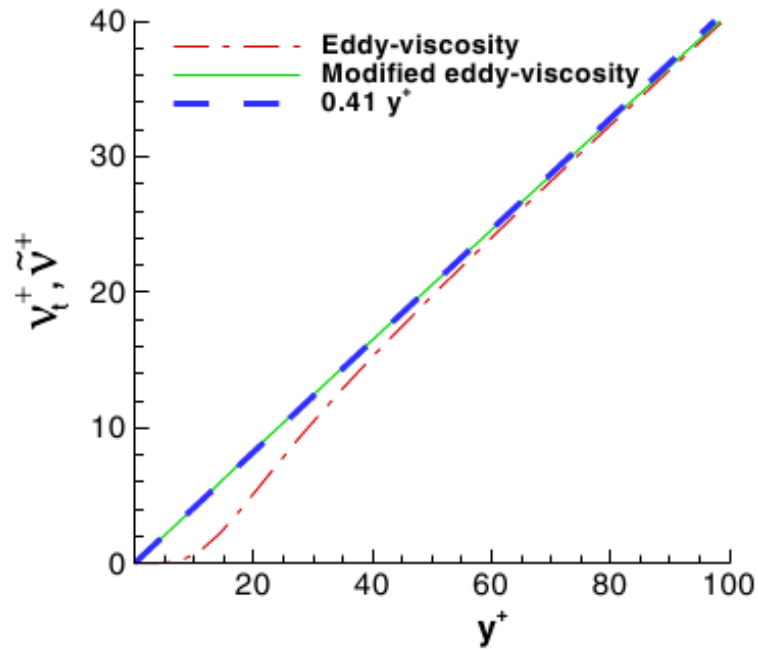


Рисунок 2.4. Безразмерные вихревая вязкость и модифицированная вихревая вязкость в пристеночной области для модели Спаларта-Аллмараса.

Поскольку в модель Спаларта-Аллмараса входит одно уравнение, пристеночная функция может быть получена без каких-либо априорных знаний о поведении в около-стеночной области. Вихревая вязкость рассчитывается из уравнения (2.54), а $\tilde{\nu}^+$ вычисляется исходя из определения вихревой вязкости: $\tilde{\nu}^+ = \nu_t^+ / f_{\nu l}$. Решение необходимо получать итеративно, но при этом, как уже было сказано, это можно сделать один раз, а результаты записать в таблицу.

Альтернативно, линейность распределения $\tilde{\nu}^+$ между стенкой и внешней границей логарифмического слоя может быть использована для задания адаптивных пристеночных функций:

$$\tilde{\nu}^+ = \kappa y^+ \quad \nu_t^+ = \tilde{\nu}^+ y^+ \quad f_{\nu l} = \frac{(\tilde{\nu}^+)^3}{(\tilde{\nu}^+)^3 + (c_{\nu l})^3} \quad (2.57)$$

Модель k- ω

В вязком подслое уравнения стандартной модели k- ω упрощаются до:

$$-C_\mu \omega^+ k^+ + \frac{d^2 k^+}{(d y^+)^2} = 0 \quad (2.58)$$

$$-\beta_1 (\omega^+)^2 + \frac{d^2 \omega^+}{(d y^+)^2} = 0 \quad (2.59)$$

Среди решений (2.59) имеется сингулярное:

$$\omega^+ = \frac{6}{\beta_1 (y^+)^2} \quad (2.60)$$

Несингулярные решения также существует, но и это решение можно использовать. Вилкоккс показывает, что дискретизация такой функции может привести к существенным численным погрешностям в вязком подслое. Он предложил фиксировать значение аналитического решения (2.59) для всех точек расчетной области, в которых $y^+ \leq 2.5$.

Используя выражение (2.59), можно получить решить уравнения (2.58) для кинетической энергии турбулентности в вязком подслое:

$$k^+ = C_k y^{+3.23} \quad (2.61)$$

Данное решение удовлетворяет граничным условиям: $k^+(0) = 0$, $\frac{d}{dy^+} k^+(0) = 0$, вихревая вязкость $\nu_t^+ = k^+ / \omega^+ = \infty (y^+)^{5.23}$ в вязком подслое.

В логарифмическом слое уравнение для кинетической энергии турбулентности упрощается до:

$$\frac{d}{dy^+} \left(\sigma_k \nu_t^+ \frac{d}{dy^+} k^+ \right) + \nu_t^+ \left| \frac{dU^+}{dy^+} \right|^2 - C_\mu \omega^+ k^+ = 0 \quad (2.62)$$

Обычно предполагается, что диффузионное слагаемое мало по сравнению с остальными двумя и диффузионный поток постоянный:

$$\sigma_k \nu_t^+ \frac{d}{dy^+} k^+ = C_k \quad (2.63)$$

Вихревая вязкость в логарифмическом слое удовлетворяет соотношению $\nu_t^+ = \kappa y^+$ и интегрирование уравнения (2.63) приводит к решению:

$$k^+ = \frac{C_k}{\sigma_k \kappa} \log(y^+) + B_k \quad (2.64)$$

Баланс генерации и диссипации в уравнении (2.62) позволяет получить выражение для ω^+ . Используя соотношение $k^+ = \nu_t^+ \omega^+$ получаем: $\omega^+ = |dU^+ / dy^+| / \sqrt{C_\mu}$ или

$$\omega^+ = \frac{1}{\kappa \sqrt{C_\mu} y^+} \quad (2.65)$$

последнее выражение получено с использованием соотношения (2.54) между градиентом скорости и вихревой вязкостью. Отсюда получаем, что:

$$k^+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \quad (2.66)$$

Таким образом, кинетическая энергия турбулентности постоянно в логарифмическом слое и константа C_k равна 0.

В переходном слое ω^+ обычно аппроксимируется как интерполяция между некоторым значением ω^+ в вязком слое и в вязком слое. Предлагается следующий способ:

$$\omega^+(y^+) = \sqrt{[\omega_{vis}^+(y^+)]^2 + [\omega_{log}^+(y^+)]^2} \quad (2.67)$$

Альтернативой уравнению (2.67) может служить использование табулированной функции, полученной в результате решения уравнений модели турбулентности. Сравнение табличного метода и уравнения (2.67) показывает существенное расхождение между ними для промежуточного слоя. Использование таблично заданной функции по результатам численного решения является более предпочтительным, чем использование уравнений, аналогичных (2.67).

Удовлетворительных формул для интерполяции k^+ в литературе сегодня нет и поэтому обычно используется ГУ $dk^+/dy^+ = 0$. Такой тип ГУ может использоваться только для стенки и только в логарифмической области и абсолютно неприменим в переходной области. Поэтому в качестве ГУ для k^+ , согласующегося с ω^+ и профилем скорости может быть такое:

$$k^+ = \nu_t^+ \omega^+ = \omega^+ \left(\frac{dU^+}{dy^+} - 1 \right) \quad (2.68)$$

Последнее можно использовать совместно с формулой Сполдинга для градиента скорости или с профилем табулированным по результатам численных расчетов.